Die Änderung der Polarisation eines Strahles von Elektronen im homogenen Magnetfeld auf Grund der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld *

Eckhard Storck

Sektion Physik der Universität München, Theoretische Physik

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1914—1928 [1968]; eingegangen am 4. Juli 1968)

In order to get full information on the behaviour of the polarization of electrons moving in a uniform magnetic field, the corresponding density matrix is studied in the Furrypicture, and its rate of change caused by the interaction with the radiation field is calculated up to second order in the coupling constant *e*. In doing so one has to take account of matrix elements of higher, that is second order, because of their interference with forward scattering. We obtain the well-known precession of the polarization vector against the direction of momentum owing to the anomalous magnetic moment, superimposed by a turning towards the opposite direction of the magnetic field, the degree of polarization tending to a constant limiting value about 0.92. This holds for an arbitrary initial polarization, in particular for originally unpolarized electrons. The polarization time decreases with increasing energy and magnetic field. In a modern storage ring this time is of the order of a few minutes and small compared to the storage time.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] haben wir die Depolarisation polarisierter Diracteilchen im homogenen Magnetfeld aufgrund ihrer elektromagnetischen Strahlung untersucht und dabei festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Umklappen des Spins (*spinflip*) hochenergetischer Elektronen sehr wesentlich von seiner Anfangsrichtung abhängt: Aus der Feldrichtung heraus in die Gegenrichtung ist der Spinflip um das $(15+8\sqrt{3})/(15-8\sqrt{3})$-fache wahrscheinlicher als umgekehrt, so daß im Gleichgewicht ein Elektronenstrahl im Verhältnis $8\cdot\sqrt{3}/15$ der Feldrichtung entgegen polarisiert sein sollte. Für die Zeit bis zur Einstellung dieses Gleichgewichtes fanden wir einen Wert, der zwar groß ist gegen die Beschleunigungszeiten der Zirkularbeschleuniger, der sich aber mit den Speicherzeiten moderner Speicherringe durchaus vergleichen läßt. Deshalb ist dieser Effekt vom theoretischen wie auch praktischen Gesichtspunkt her von großem Interesse.[1a]

Während unserer Untersuchungen hatten bereits Ternov u.a. [2] einen Unterschied der entsprechenden Spinflip-Strahlungsintensitäten festgestellt und damit qualitativ auf diesen Effekt hingewiesen. Später untersuchten ihn Sokolov und Ternov [3] auch quantitativ und erhielten Übereinstimmung mit unserem Ergebnis. Im Anschluß daran diskutierten Baier u.a. [4, 5, 6] diesen Effekt und besonders die Möglichkeiten seiner Unterdrückung oder Abschwächung durch die sogenannte Resonanzdepolarisation und andere Störeffekte im realen Speicherring. Wesentliche Beeinträchtigungen sollten danach durch geeignete Wahl der Teilchenenergie sowie der Fokussierungsfelder vermeidbar sein.

Nun besteht aber die Änderung des Polarisationsvektors im allgemeinen aus einer Änderung seiner Länge und einer Änderung seiner Richtung. Mit der Spinflipwahrscheinlichkeit gewinnt man jedoch nur Aussagen über die Projektion des Polarisationsvektors auf seine Anfangsrichtung, d.h. eine Drehung läßt sich von einer Längenänderung nicht unterscheiden. Um von der eingangs geschilderten Asymmetrie der Spinflipwahrscheinlichkeit eindeutig auf die Bildung einer Polarisation schließen zu können, muß man deshalb zusätzlich die Annahme machen, daß die Polarisationsänderung in Feldrichtung von einer möglicherweise vorhandenen oder auch entstehenden Polarisation in der Ebene senkrecht zum Feld unabhängig ist. Das bedarf einer Prüfung und

* Diese Arbeit wurde als Dissertation der Universität München angenommen.

1 E. Storck, Diplomarbeit, München, April 1963 (nicht veröffentlicht).

1a Kürzlich haben wir eine rein klassische Erklärung dieses Polarisationseffektes gefunden: E. Storck, Phys. Letters **27A**, 651 (1968).

2 I. M. Ternov, Y. M. Loskutov u. L. I. Korovina, Sov. Phys. JETP **14**, 921 [1962].

3 A. A. Sokolov u. I. M. Ternov, Sov. Phys. Doklady **8**, 1203 [1964].

4 V. N. Baier u. Y. F. Orlov, Sov. Phys. Doklady **10**, 1145 [1966].

5 V. N. Baier u. V. M. Katkov, Sov. JNP **3**, 57 [1966].

6 V. N. Baier u. V. M. Katkov, Phys. Letters **24A**, 327 [1967].

ist Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung des Polarisationseffektes in einem erweiterten Rahmen: Zum Zwecke einer vollständigen Erfassung der Polarisationskinematik wird die entsprechende Dichtematrix eines Elektronenstrahls im homogenen Magnetfeld untersucht und deren zeitliche Änderung aufgrund der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld berechnet, wobei wir uns — wie bei der Spinflipwahrscheinlichkeit — auf die niedrigste Näherung ($\sim e^2$) der quantenelektrodynamischen Störung im Furry-Bild beschränken.

Im Hinblick auf die Gegebenheiten im Speicherring gehen wir aus von einem scharf gebündelten Strahl hochenergetischer, nach Grad und Richtung beliebig polarisierter Elektronen auf einer Kreisbahn senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld. Aufgrund der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld gibt es dann „spontane" Strahlungsübergänge der einzelnen Elektronen in verschiedene Endzustände und dadurch eine im allgemeinen veränderte Formation der einzelnen Spins innerhalb der Elektronengesamtheit, d.h. eine Polarisationsänderung. Dementsprechend interessieren wir uns für den Einfluß der Strahlungsübergänge auf die Polarisation des gesamten Elektronenstrahls (einschließlich der Elektronen, die nicht „gestrahlt" haben) und müssen deshalb zu ihrer Berechnung den vollständigen Streuoperator $S = 1 + R$, und nicht nur, wie bei gewöhnlichen Streuproblemen, den Anteil R berücksichtigen. Da aber S in den gestörten Dichteoperator $Q' = S\,Q\,S^+$ quadratisch eingeht, müssen bereits in niedrigster Näherung ($\sim e^2$) Interferenzterme der „Vorwärtsstreumatrix" 1 mit R-Matrixelementen höherer, nämlich 2. Ordnung berücksichtigt werden, die der Emission und Reabsorption virtueller Photonen sowie der Vakuumpolarisation entsprechen (Kap. 3). Dadurch kommt bei der Bestimmung von Q' der verhältnismäßig komplizierte Elektronpropagator im Furry-Bild $S^c(x, y)$ und das Problem der Renormierung ins Spiel. Die Divergenzen heben sich jedoch bemerkenswerterweise in den uns schließlich allein interessierenden, mit Q' gebildeten Erwartungswerten der Polarisation heraus.

Zunächst wird in Kap. 2 die Polarisation von Dirac-Teilchen in einem äußeren homogenen Magnetfeld in Anlehnung an den kräftefreien Fall definiert und für ihre Beschreibung ein möglichst kompakter Formalismus entwickelt. In der Literatur wurden bisher lediglich die Projektionen der Polarisation auf die Impuls- und auf die Feldrichtung behandelt. Nun präzedieren aber im Magnetfeld Spin und Impuls bekanntlich[7] mit gleicher Winkelgeschwindigkeit. Es ist also anschaulich zu erwarten, daß zu jeder beliebigen Spinrichtung ein stationärer Zustand des Dirac-Teilchens und deshalb auch ein mit dem Hamilton-Operator vertauschbarer Polarisationsoperator existiert. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß der kovariante Polarisationsoperator für kräftefreie Dirac-Teilchen auch in einem äußeren homogenen Magnetfeld seine wesentlichen Eigenschaften behält, wenn der Hilbert-Raum in geeigneter Weise eingeschränkt und die beliebige Polarisationsrichtung auf den kinetischen Impuls bezogen wird. Damit ergibt sich dann für den Dichteoperator der Polarisation von Gesamtheiten eine ähnlich einfache Darstellung wie im kräftefreien Fall.

Nach diesen Vorbereitungen wird in Kap. 4 die gesuchte Polarisationsänderung eines anfangs beliebig polarisierten Elektronenstrahls berechnet. Dabei ist die Summation über die virtuellen Zwischen- bzw. über die reellen Endzustände eine insofern neue Aufgabe, als keine der üblichen Entwicklungen — insbesondere des Elektronpropagators — nach dem äußeren Feld (Bornsche Näherung) anwendbar ist, denn das Vektorpotential des homogenen Magnetfeldes kann nicht als kleine Störung betrachtet werden. Bei den reellen Prozessen führen spezielle Näherungs- und Integrationsverfahren zum Ziel, die zur Berechnung der Synchrotronstrahlung entwickelt wurden, nicht aber bei den virtuellen. Wir leiten jedoch eine spezielle Integraldarstellung des Elektronpropagators im homogenen Magnetfeld ab, mit deren Hilfe es gelingt, die Integralsumme über die Parameter der virtuellen Teilchen exakt auszuführen. Dabei resultiert ein Doppelintegral über elementare transzendente Funktionen, das sich nach der Methode der stationären Phase auswerten läßt. Nach diesem relativ einfachen und übersichtlichen Verfahren kann man aber auch die reellen Prozesse aufsummieren und erzielt so die gleichen Resultate wie auf dem zuvor erwähnten Weg.

2. Beschreibung der Polarisation von Dirac-Teilchen im äußeren homogenen Magnetfeld

Aus dem Hilbert-Raum der spinorwertigen Funktionen projizieren wir den Polarisationsraum für

[7] Die zusätzliche Präzession des Spins aufgrund des anomalen magnetischen Moments wird ja erst durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld verursacht.

Dirac-Teilchen im äußeren homogenen Magnetfeld heraus. In diesen läßt sich dann der kovariante Formalismus zur Polarisationsbeschreibung kräftefreier Dirac-Teilchen weitgehend übertragen.

2.1. Der Polarisationsraum

Ein Dirac-Teilchen im äußeren Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ wird durch den Hamilton-Operator

$$H = -\gamma^\circ \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi} + i\gamma^\circ m\,, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{i}\,\boldsymbol{\partial} - e\boldsymbol{A}(x) \qquad (2.1)$$

mit

$$[\pi_1, \pi_2] = ieB; \quad [\pi_1, \pi_3] = [\pi_2, \pi_3] = 0 \qquad (2.2)$$

beschrieben. Zur Klassifikation der Eigenlösungen von H ist es zweckmäßig, die Operatoren $\mathring{x}_1$ und $\mathring{x}_2$ für die Koordinaten des klassischen Bahnmittelpunktes[8]

$$\mathring{x}_1 := x_1 + \frac{\pi_2}{eB}\,; \quad \mathring{x}_2 := x_2 - \frac{\pi_1}{eB}\,;$$

$$[\mathring{x}_1, \mathring{x}_2] = -\frac{i}{eB} \neq 0$$

einzuführen, die wegen (2.2) mit $\boldsymbol{\pi}$ kommutieren:

$$[\mathring{x}_1, \boldsymbol{\pi}] = 0; \quad [\mathring{x}_2, \boldsymbol{\pi}] = 0\,.$$

Daraus folgt

$$[\mathring{x}_1, H] = 0; \quad [\mathring{x}_2, H] = 0 \qquad (2.3)$$

sowie aus (2.1) und (2.2)

$$[\pi_3, H] = 0\,. \qquad (2.4)$$

Somit bilden H^2, $\mathring{x}_1$ und π_3 ein System von vertauschbaren hermiteschen Operatoren[9]. Deren gemeinsamer Eigenspinor sei $u(q\,|\,x)$:

$$\begin{aligned} H^2 u(q\,|\,\boldsymbol{x}) \equiv (\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + m^2 - eB\Sigma^3)\,u(q\,|\,\boldsymbol{x}) &= E^2 u(q\,|\,\boldsymbol{x})\,,\\ \mathring{x}_1 u(q\,|\,\boldsymbol{x}) &= p_1 u(q\,|\,\boldsymbol{x})\,,\\ \pi_3 u(q\,|\,\boldsymbol{x}) &= p_3 u(q\,|\,\boldsymbol{x})\,, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

wobei wir für die Eigenwerte E^2, p_1 und p_3 zusammenfassend q gesetzt haben. Da das Gleichungssystem (2.5) wegen[10]

$$\Sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

nur Diagonalmatrizen enthält, sind die Komponenten $u_\alpha(q\,|\,x)$ noch voneinander unabhängig. Letztere sind aber im wesentlichen eindeutig bestimmt, denn das System der 3 Operatoren $\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + m^2 \pm eB$, $\mathring{x}_1$ und π_3 ist im Hilbert-Raum der skalaren Funktionen vollständig. Wir bezeichnen sie zusammenfassend mit $u_1 = u_3 =: f$, $u_2 = u_4 =: g$ und bilden mit ihnen gemäß

$$\overset{1}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f(q\,|\,\boldsymbol{x})\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overset{2}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0\\ g(q\,|\,\boldsymbol{x})\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overset{3}{u} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ f\\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overset{4}{u} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ g \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

die Basis $\overset{\alpha}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x})$ eines für festes q 4-dimensionalen Spinorraumes V_q, dessen Metrik und Norm durch

$$(\overset{\alpha}{u}(q), \overset{\alpha'}{u}(q)) := \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,[\overset{\alpha}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x})]^+ \overset{\alpha'}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x}) = \delta^{\alpha\alpha'}$$

gegeben seien. Der Projektor, der den Raum V_q aus dem Hilbert-Raum der spinorwertigen Funktionen herausprojiziert, lautet demnach

$$P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sum_{\alpha=1}^{4} \overset{\alpha}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x})\,[\overset{\alpha}{u}(q\,|\,\boldsymbol{y})]^+ = \begin{pmatrix} f(q\,|\,\boldsymbol{x})\,f^*(q\,|\,\boldsymbol{y}) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & g(q\,|\,\boldsymbol{x})\,g^*(q\,|\,\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Im Hinblick auf spätere Rechnungen weisen wir darauf hin, daß $P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ als 4×4-Matrix diagonal ist und insbesondere mit γ°, γ^3 und γ^5 vertauscht. In V_q lassen sich für den Operator

$$P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon\,\frac{H}{E}\right), \quad E > 0\,, \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (2.8)$$

[8] M. H. Johnson u. B. A. Lippmann, Phys. Rev. **76**, 828 [1949].

[9] Anstelle des Operators $\mathring{x}_1$ kann natürlich auch $\mathring{x}_2$ oder ein beliebiges hermitesches Polynom $P(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2)$ gewählt werden.

[10] Wir benutzen folgende Darstellung der Diracschen γ-Matrizen: $\gamma^\circ = i\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\gamma} = i\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$.

mit Hilfe von (2.3) bis (2.6) folgende Relationen beweisen:

$$\begin{aligned}
&[P^\varepsilon, H^2] = [P^\varepsilon, \mathring{x}_1] = [P^\varepsilon, \pi_3] = 0; && H\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x}) = \varepsilon E\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x});\\
&P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\,P^{\varepsilon'}(q\,|\,\boldsymbol{x}) = \delta^{\varepsilon\varepsilon'}\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x}); && [P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})]^+ = P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x});\\
&\sum_{\varepsilon=-1}^{1} P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x}) = 1; && \mathrm{Sp}_q[P^\varepsilon(q)] \equiv \sum_{\alpha=1}^{4} (\overset{\alpha}{u}(q), P^\varepsilon(q)\,\overset{\alpha}{u}(q)) = 2\,.
\end{aligned}$$

Danach ist $P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})$ ein Projektor in V_q: $P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\,u(q\,|\,\boldsymbol{x}) =: u^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})$,

der diesen Raum in den Unterraum des Teilchens V_q^1 und den des Antiteilchens $V_q^{(-1)}$ erschöpfend zerlegt; diese Unterräume V_q^ε sind 2-dimensional und bilden den jeweiligen Polarisationsraum.

2.2. Der Polarisationsoperator

Im kräftefreien Fall[11] lautet im Dirac-Raum bei scharfem Teilchenimpuls p der Operator für die Polarisation bezüglich der Richtung $t^{(i)\mu}(p)$

$$Z^{(i)}(p) = \gamma^5\gamma^\mu t^{(i)}(p), \quad i = 1, 2, 3; \tag{2.9}$$

dabei gilt

$$t^{(i)\mu}(p)\,t_\mu^{(k)}(p) = \delta^{ik}; \quad t^{(i)\mu}(p)\,p_\mu = 0; \quad p^\circ = \varepsilon\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,. \tag{2.10}$$

Ein spezielles Dreibein $t^{(i)\mu} =: (t^{(i)\circ}, \boldsymbol{t}^{(i)})$ mit diesen Eigenschaften ist etwa

$$\begin{aligned}
t^{(1)\mu}(p) &= \frac{1}{m}\sqrt{\frac{p_0^2 - m^2 - p_3^2}{p_0^2 - p_3^2}}\,(p^\circ, 0, 0, p^3) + \frac{1}{m}\sqrt{\frac{p_0^2 - p_3^2}{p_0^2 - m^2 - p_3^2}}\,(0, p_1, p_2, 0),\\
t^{(2)\mu}(p) &= \sqrt{\frac{1}{p_0^2 - m^2 - p_3^2}}\,(0, -p_2, p_1, 0), \quad t^{(3)\mu}(p) = \sqrt{\frac{1}{p_0^2 - p_3^2}}\,(p^3, 0, 0, p^\circ).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dabei weisen die Raumanteile $\boldsymbol{t}^{(3)}(p)$ in x_3-Richtung und $\boldsymbol{t}^{(2)}(\boldsymbol{p})$ in die auf $\boldsymbol{t}^{(3)}(p)$ und $\boldsymbol{p}$ senkrechte Richtung; $\boldsymbol{t}^{(1)}(p)$ ist dann durch (2.10) bestimmt. Um nun den Einfluß des äußeren Magnetfeldes $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ zu berücksichtigen, ersetzen wir in (2.11) wie üblich p^μ durch den kinetischen Impuls π^μ:

$$p^\mu \Rightarrow \pi^\mu, \quad t^{(i)\mu}(p) \Rightarrow t^{(i)\mu}(\pi); \quad \pi^\circ \equiv \varepsilon E, \quad \pi_3 \equiv p_3, \tag{2.12}$$

und definieren analog zu (2.9)

$$Z^{(i)}(\pi) := \gamma^5\gamma^\mu t_\mu^{(i)}(\pi). \tag{2.13}$$

Für diesen Operator gelten im Polarisationsraum V_q^ε unter Berücksichtigung von $H = \varepsilon E$ die folgenden Beziehungen:

$$[H, Z^{(i)}(\pi)] = [\mathring{x}_1, Z^{(i)}(\pi)] = [\pi_3, Z^{(i)}(\pi)] = 0, \tag{2.14}$$

$$Z^{(k)}(\pi)\,Z^{(l)}(\pi) = \delta^{kl} + i\,\varepsilon^{kln} Z^{(n)}(\pi), \tag{2.15}$$

d.h. $\frac{1}{2}Z^{(i)}(\pi)$ ist Spindrehimpulskomponente in Richtung[12] $t^{(i)\mu}(\pi)$ und kann wegen (2.14) zur Klassifikation der Spinoren $u^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})$ im Polarisationsraum V_q^ε dienen. Im weiteren können wir unter der Richtung $t^\mu(\pi)$ einen beliebigen Vektor $\bar{t}^{(i)\mu}(\pi)$ verstehen, der gemäß

$$\bar{t}^{(i)\mu}(\pi) = a_k^i\,t^{(k)\mu}(\pi), \quad a_k^i\,a^{lk} = \delta^{il}, \tag{2.16}$$

aus (2.11) hervorgeht, denn die Gln. (2.14) und (2.15) sind offensichtlich invariant gegenüber einer solchen Transformation.

Sei also $u_\eta^\varepsilon(t, q\,|\,\boldsymbol{x})$ normierte Eigenlösung von $Z(\pi) = \gamma^5\gamma^\mu t_\mu(\pi)$:

$$Z(\pi)\,u_\eta^\varepsilon(t, q\,|\,\boldsymbol{x}) = \eta\,u_\eta^\varepsilon(t, q\,|\,\boldsymbol{x}); \quad (u_\eta^\varepsilon(q), u_{\eta'}^{\varepsilon'}(q)) = \delta^{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta_{\eta\eta'}; \quad \eta, \eta' = \pm 1$$

[11] H. J. Meister, S.B. Bayer. Akad. d. Wiss. 1962.

[21] Das kann man durch den Anschluß eines homogen magnetischen Halbraumes an einen feldfreien bestätigen (vgl.[1]); denn dabei gehen die nach dieser Interpretation einander entsprechenden Amplituden der Polarisationsrichtungen $t^\mu(\pi)$ im Magnetfeld einerseits und $t^\mu(p)$ im feldfreien Raum andererseits an der Grenze stetig ineinander über.

und $P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})$ der Projektor, der $u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})$ aus dem Raum V^ε_q herausprojiziert. Dann ist

$$P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}(1+\eta Z(\pi)), \tag{2.17}$$

denn dieser Ausdruck erfüllt als Operator im Polarisationsraum V^ε_q folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&[P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x}),\, P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})] = 0; && Z(\pi)\,P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x}) = \eta\, P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x});\\
&P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,P^{\varepsilon}_{\eta'}(t,q\,|\,\boldsymbol{x}) = \delta_{\eta\eta'}\,P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x}); && [P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})]^+ = P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x});\\
&\sum_{\eta=-1}^{1} P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x}) = 1; && \mathrm{Sp}^\varepsilon_q[P^\varepsilon_\eta(t,q)] \equiv \sum_{\eta'=-1}^{1}(u^\varepsilon_{\eta'},\, P^\varepsilon_\eta u^\varepsilon_{\eta'}) = 1\,.
\end{aligned}$$

Da die $u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})$ mit $\varepsilon,\eta=\pm 1$ sowie die $\overset{\alpha}{u}(q\,|\,\boldsymbol{x})$ mit $\alpha = 1,\ldots,4$ jeweils eine orthonormale Basis von V_q bilden, gilt mit (2.7)

$$\sum_{\varepsilon,\eta=-1}^{1} u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,[u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{y})]^+ = \sum_{\alpha=1}^{4}\overset{\alpha}{u}\,(q\,|\,\boldsymbol{x})\,[\overset{\alpha}{u}\,(q\,|\,\boldsymbol{y})]^+ \equiv P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,.$$

Das ist die Vollständigkeitsrelation in V_q, denn $P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ist in diesem Raum Einsoperator. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})$, so erhält man erwartungsgemäß

$$u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,[u^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{y})]^+ = P^\varepsilon_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,, \tag{2.18}$$

eine für die praktische Rechnung sehr nützliche Beziehung.

Die nicht vertauschbaren Komponenten π_1 und π_2 des kinetischen Impulses kann man aus dem System der $Z^{(i)}(\pi)$ im Raum V^ε_q eliminieren; denn bei Zugrundelegung des Dreibeins (2.11) mit (2.12) gilt

$$Z^{(3)}(\pi) \equiv Z^{(3)}(E,\,p_3) =: Z^{(3)}(q) \tag{2.19a}$$

und weiter unter Berücksichtigung der Dirac-Gleichung $H = \varepsilon E$

$$Z^{(1)}(\pi) = \frac{\gamma^5}{m}\left[\sqrt{\frac{E^2-m^2-p_3^2}{E^2-p_3^2}}\,(-\varepsilon\gamma^\circ E+\gamma^3 p_3) + \sqrt{\frac{E^2-p_3^2}{E^2-m^2-p_3^2}}\,(\varepsilon\gamma^\circ E-\gamma^3 p_3+i m)\right] =: Z^{(1)}(q)\,, \tag{2.19b}$$

$$Z^{(2)}(\pi) = \gamma^\circ\gamma^3\,\frac{\varepsilon\gamma^\circ E-\gamma^3 p_3+i m}{\sqrt{E^2-m^2-p_2^3}} =: Z^{(2)}(q)\,. \tag{2.19c}$$

In der umgeformten Gestalt $Z^{(i)}(q)$ werden wir die Polarisationsoperatoren bei unseren Rechnungen mit Vorteil benutzen. Dagegen ist die ursprüngliche Form $Z^{(i)}(\pi)$ aus (2.13) für die Interpretation insbesondere der Polarisationsrichtung unersetzlich.

2.3. Die Polarisation einer Gesamtheit von Dirac-Teilchen

In einer Gesamtheit von Dirac-Teilchen der Sorte ε und mit scharfen q-Werten sind die Spins im allgemeinen nicht alle einheitlich orientiert. Die Polarisation eines solchen quantenmechanischen Gemisches wird mit Hilfe des statistischen Operators $\varrho^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ beschrieben, und zwar durch die Erwartungswerte

$$\zeta^{(i)}(q) := \langle Z^{(i)}(q)\rangle \equiv \frac{\mathrm{Sp}^\varepsilon_q[Z^{(i)}(q)\,\varrho^\varepsilon(q)]}{\mathrm{Sp}^\varepsilon_q[\varrho^\varepsilon(q)]} \equiv \frac{\sum_\eta (u^\varepsilon_\eta, Z^{(i)}(q)\,\varrho^\varepsilon(q)\,u^\varepsilon_\eta)}{\sum_\eta (u^\varepsilon_\eta,\,\varrho^\varepsilon(q)\,u^\varepsilon_\eta)}\,.$$

Wegen (2.18) können wir dafür auch schreiben:

$$\zeta^{(i)}(q) = \frac{\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{Sp}^4[Z^{(i)}(q)\,\varrho^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\;P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]}{\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\;\mathrm{Sp}^4[\varrho^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]}\,,$$

wobei $\mathrm{Sp}^4[A]$ die Spur der (4×4)-Matrix A bedeutet. Durch die Komponenten $\zeta^{(i)}(q)$ sind dann die Polarisationsrichtung $t^\mu(\pi)$ und der Polarisationsgrad r der Gesamtheit gemäß

$$t^\mu(\pi) := \frac{\sum_i \zeta^{(i)}(q)\,t^{(i)\mu}(\pi)}{\sqrt{\sum_i \zeta^{(i)}(q)\,\zeta^{(i)}(q)}}\,,\quad r := \sqrt{\sum_i \zeta^{(i)}(q)\,\zeta^{(i)}(q)} \tag{2.20}$$

definiert, wobei wegen $\langle Z(q)\rangle^2 \leqq 1$ gilt: $0 \leqq r \leqq 1$. Bei vorgegebener Polarisation $\zeta^{(i)}(q)$ andererseits läßt sich der zugehörige, auf 1 normierte statistische Operator in folgender Form darstellen:

$$\varrho^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sum_i \zeta^{(i)}(q)\, Z^{(i)}(q)\right) P^\varepsilon(q\,|\,\boldsymbol{x})\, P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,; \quad \mathrm{Sp}_q^\varepsilon[\varrho^\varepsilon(q)] = 1\,. \tag{2.21}$$

Hat man es mit einer auch bezüglich der q-Werte nicht reinen Gesamtheit zu tun, so versteht man unter deren Polarisation den Erwartungswert

$$\zeta^{(i)} := \frac{\sum_q \zeta^{(i)}(q)\, \mathrm{Sp}_q^\varepsilon[\varrho^\varepsilon(q)]}{\sum_q \mathrm{Sp}_q^\varepsilon[\varrho^\varepsilon(q)]} = \frac{\sum_q \mathrm{Sp}_q^\varepsilon[Z^{(i)}(q)\,\varrho^\varepsilon(q)]}{\sum_q \mathrm{Sp}_q^\varepsilon[\varrho^\varepsilon(q)]}\,. \tag{2.22}$$

Diese Definition entspricht derjenigen des analogen Falles kräftefreier Teilchen mit aufgefächertem Impuls, und man muß wie dort darauf achten, daß die $\zeta^{(i)}$ als relative Anzahlen von Teilchen mit differentiell (d. h. für festes q) definierter Eigenschaft zu interpretieren sind. Bei einem Wechsel der Bezugsrichtung $t^{(i)\mu}$ muß also in (2.22) unter der q-Summe transformiert werden, und da die Transformationskoeffizienten a_k^i in (2.16) im allgemeinen q-abhängig sind, geht die Vektoreigenschaft der Polarisation verloren. Nur wenn die q-Streuung der betrachteten Gesamtheit hinreichend klein ist, kann man in guter Näherung von den drei Komponenten (2.22) wie in (2.20) auf eine Polarisationsrichtung des Gemisches schließen.

3. Allgemeiner Ausdruck für die Änderung der Polarisation

Die gesuchte Polarisationsänderung aufgrund der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld

$$\Delta\zeta^{(i)} := \zeta'^{(i)} - \zeta^{(i)} \tag{3.1}$$

ist gegeben durch die Differenz der Ausdrücke für die Polarisation $\zeta'^{(i)}$ nach bzw. $\zeta^{(i)}$ vor den Strahlungsprozessen. Wir nehmen an, daß zu Anfang eine durch[13] $\varrho^1(q)$ gemäß (2.21) beschriebene, normierte Gesamtheit von Elektronen mit scharfem q und der Polarisation $\zeta^{(i)}(q)$ vorliegt. Da die Teilchenzahl bei den Strahlungsprozessen erhalten bleibt, gilt außerdem

$$\sum_{q'} \mathrm{Sp}_{q'}^1[\varrho'^1(q')] = \mathrm{Sp}_q^1[\varrho^1(q)] \equiv 1$$

und damit nach (2.22) für die Polarisationsänderung (3.1)

$$\Delta\zeta^{(i)}(q) = \sum_{q'} \mathrm{Sp}_{q'}^1[Z^{(i)}(q')\,\varrho'^1(q')] - \mathrm{Sp}_q^1[Z^{(i)}(q)\,\varrho^1(q)]\,. \tag{3.2}$$

Zur Berechnung dieses Ausdrucks benötigt man die Kenntnis des statistischen Operators nach den Strahlungsprozessen $\varrho'^1(q')$, dessen Zusammenhang mit $\varrho^1(q)$ von der Streutheorie im Furry-Bild[14] geliefert wird.

3.1. Der statistische Operator nach den Strahlungsprozessen

Wir betrachten die Wechselwirkung zwischen dem in üblicher Weise quantisierten Strahlungsfeld $a_\mu(x)$ und dem quantisierten Dirac-Feld $\psi(x)$ im homogenen Magnetfeld, das als äußeres, d. h. klassisches Feld $A_\mu(x)$ behandelt wird:

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu) + m]\,\psi(x) = 0\,, \quad \psi(x) = \psi^{(-)}(x) + \psi^{(+)}(x)\,,$$
$$\psi^{(-)}(x) = \sum_{q,\eta} a_\eta(q)\, u_\eta^1(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\, e^{-iEx^\circ}\,, \quad \psi^{(+)}(x) = \sum_{q,\eta} b_\eta^*(q)\, u_\eta^{(-1)}(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\, e^{iEx^\circ}\,. \tag{3.3}$$

Dabei sind die $a_\eta(q)$ bzw. $b_\eta^*(q)$ Vernichtungsoperatoren für Teilchen bzw. Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen mit den Amplituden $u_\eta^\varepsilon(t,q\,|\,\boldsymbol{x})$. Das Vakuum $|0\rangle$ im äußeren Feld ist dann durch

$$\psi^{(-)}(x)|0\rangle = 0\,, \quad \overline{\psi^{(+)}(x)}|0\rangle = 0 \tag{3.4}$$

[13] Der Einfachheit halber betrachten wir nur Elektronen, d. h. $\varepsilon = 1$.

[14] J. M. Jauch u. F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge 1955, Chap. 14.

definiert. Für die Wechselwirkung lautet die Lagrange-Dichte

$$L_{\mathrm{w}}(x) = i\,\frac{e}{2}\,[\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) - \psi^T(x)\,\gamma^{\mu T}\,\overline{\psi}^T(x)]\,a_\mu(x)$$

und damit der S-Operator

$$S = 1 + \sum_{n\geqq 1} S^{(n)}\,; \quad S^{(n)} = \frac{(i)^n}{n!}\int \mathrm{T}\,[L_{\mathrm{w}}(x_1)\ldots L_{\mathrm{w}}(x_n)]\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,, \tag{3.5}$$

wobei $\mathrm{T}\,[\ldots]$ das zeitgeordnete Produkt bedeutet.

Sei nun $|i\rangle = |\eta t, q\rangle$ der Anfangszustand mit einem Elektron und $|f\rangle = |\eta' t', q'\rangle \otimes |\gamma\rangle$ der Endzustand mit einem Elektron und einem gegebenenfalls erzeugten Photon. Sei außerdem die Übergangsamplitude von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ abgekürzt durch

$$\langle\gamma|\otimes\langle\eta' t', q'|S|\,\eta\, t, q\rangle =: (u^1_{\eta'}(t', q'),\, S_{q'q}(\gamma)\, u^1_\eta(t, q))\,.$$

Mit den dadurch definierten (4×4)-Matrizen $S_{q'q}(\gamma)$ lautet dann die gesuchte Beziehung zwischen dem statistischen Operator vor und dem nach den Strahlungsprozessen

$$\varrho'^1(q') = \sum_\gamma P^1(q')\,P(q')\,S_{q'q}(\gamma)\,\varrho^1(q)\,S^+_{q'q}(\gamma)\,P^1(q')\,P(q')\,.$$

Mit der Entwicklung (3.5) erhalten wir daraus bis zur 2. Ordnung in e:

$$\begin{aligned}\varrho'^1(q') &= \sum_\gamma P^1(q')\,P(q')\,[(\delta_{q'q} + S^{(1)}_{q'q}(\gamma) + S^{(2)}_{q'q}(\gamma))\,\varrho^1(q)\cdot(\delta_{q'q} + S^{(1)+}_{q'q}(\gamma) + S^{(2)+}_{q'q}(\gamma)) + \cdots]\,P^1(q')\,P(q')\\ &= \delta_{q'q}[\varrho^1(q) + P^1(q)\,P(q) S^{(2)}_{qq}\,\varrho^1(q) + \varrho^1(q)\,S^{(2)+}_{qq}\,P^1(q)\,P(q)]\\ &\quad + \sum_\gamma P^1(q')\,P(q')\,S^{(1)}_{q'q}(\gamma)\,\varrho^1(q)\,S^{(1)+}_{q'q}(\gamma)\,P^1(q')\,P(q') + ((e^4))\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dabei ist

$$S^{(1)}_{q'q}(\gamma|\boldsymbol{x}) = i\,\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{i\,\gamma^\circ\,\gamma^\mu}{\sqrt{2\,|\boldsymbol{\varkappa}|}}\,e^{(\lambda)}_\mu(\boldsymbol{\varkappa})\,e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{x}}\int \mathrm{d}x^\circ\, e^{i(E'+|\boldsymbol{\varkappa}|-E)x^\circ}$$

und beschreibt die Abstrahlung eines Photons mit dem Impuls $\boldsymbol{\varkappa}$ und der linearen Polarisation $e^{(\lambda)}_\mu(\boldsymbol{\varkappa})$. Der Ausdruck $S^{(2)}_{qq}$ mit

$$S^{(2)}_{qq} = S^{(2)\mathrm{F}}_{qq} + S^{(2)\mathrm{P}}_{qq}\,, \tag{3.7}$$

$$S^{(2)\mathrm{F}}_{qq}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = e^2\int \mathrm{d}x^\circ\,\mathrm{d}y^\circ\, e^{-iE(y^\circ-x^\circ)}\,i\,\gamma^\circ\,\gamma^\mu\,S^{\mathrm{c}}(x,y)\,\gamma_\mu\,D^{\mathrm{c}}(y-x)\,, \tag{3.8}$$

$$S^{(2)\mathrm{P}}_{qq}(\boldsymbol{x}) = -\,e^2\int \mathrm{d}x^\circ\,\mathrm{d}^4y\,i\,\gamma^\circ\,\gamma^\mu\,D^{\mathrm{c}}(x-y)\,\mathrm{Sp}^4[\gamma^\mu\,S^{\mathrm{c}}(y,y)] \tag{3.9}$$

Abb. 1. Feynman-Diagramme für Prozesse 2. Ordnung im äußeren Feld. ═══: Elektronlinie im Furry-Bild, ┈┈┈┈: Photonlinie.

beschreibt die virtuelle Emission und Reabsorption von Photonen (F) und die Vakuumpolarisation (P). In (3.8) und (3.9) ist

$$D^{\mathrm{c}}(y-x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{iK(y-x)}}{K^2 - i\,\mu}\,\mathrm{d}^4K$$

der gewöhnliche Photonpropagator und $S^{\mathrm{c}}(x,y)$ der Dirac-Propagator im äußeren homogenen Magnetfeld. Wir wollen hier eine für unsere Rechnungen geeignete Darstellung von $S^{\mathrm{c}}(x,y)$ ableiten[15]. Aus der Definition

$$S^{\mathrm{c}}(x,y) := -\,i\langle 0|\mathrm{T}\,[\psi(x)\,\overline{\psi}(y)]|0\rangle$$

folgt zunächst allgemein mit (3.3) und (3.4) die bekannte Form

$$S^{\mathrm{c}}(x,y) = \begin{cases} -\,i\sum\limits_{q,\eta} u^1_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,\bar{u}^1_\eta(t,q\,|\,\boldsymbol{y})\,e^{-iE(x^\circ-y^\circ)}\,, & x^\circ > y^\circ\,,\\ i\sum\limits_{q,\eta} u^{(-1)}_\mu(t,q\,|\,\boldsymbol{x})\,\bar{u}^{(-1)}_\mu(t,q\,|\,\boldsymbol{y})\,e^{iE(x^\circ-y^\circ)}\,, & x^\circ < y^\circ\end{cases}$$

[15] Andere, hier ungeeignete Darstellungen von $S^{\mathrm{c}}(x,y)$ findet man bei G. GÉHÉNIAU u. M. DEMEUR, Physica **17**, 71 [1951]. — R. KAITNA u. P. URBAN, Nucl. Phys. **56**, 518 [1964].

und weiter speziell mit Hilfe von (2.18), (2.8) und (2.17)

$$S^c(x,y) = \frac{i}{2E}\sum_q \begin{cases} (H+E)\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,i\gamma_\circ e^{-iE(x^\circ-y^\circ)}, & x^\circ > y^\circ, \\ (H-E)\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,i\gamma_\circ e^{iE(x^\circ-y^\circ)}, & x^\circ < y^\circ. \end{cases}$$

Diesen Ausdruck schließlich kann man offenbar einheitlich durch das Wegintegral

$$S^c(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(H+p^\circ)\,P(q\,|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{p_0 p^\circ + E^2 - i\mu}\, i\gamma_\circ e^{ip_\circ(x^\circ-y^\circ)}\,\mathrm{d}p^\circ \tag{3.10}$$

darstellen, wobei der imaginäre Zusatzterm $i\mu$ in üblicher Weise anzeigen soll, wie die Pole $\pm E$ in der p°-Ebene zu umgehen sind.

Setzt man (3.6) in den Ausdruck (3.2) für die Polarisationsänderung ein, so erhält man

$$\Delta\zeta^{(i)}(q) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)}\varrho^1(q)\,Z^{(i)}(q)] + \sum_{q',\gamma}\mathrm{Sp}_{q'}^1[S_{q'q}^{(1)}(\gamma)\,\varrho^1(q)\,S_{q'q}^{(1)+}(\gamma)\,Z^{(i)}(q')]. \tag{3.11}$$

3.2. Nicht-Beitrag der Vakuumpolarisation

Wir wollen zeigen, daß die Vakuumpolarisation in (3.11) keinen Beitrag liefert, daß also gilt

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{P}}\varrho^1(q)\,Z^{(i)}(q)] \overset{!}{=} 0. \tag{3.12}$$

Dazu setzen wir (2.21) in (3.12) ein und erhalten mit Hilfe von (2.15)

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{P}}(Z^{(i)}(q) + \zeta^{(i)}(q) - i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ikl}\zeta^{(k)}(q)\,Z^{(l)}(q))] \overset{!}{=} 0. \tag{3.13}$$

Nun gilt aber die Beziehung

$$\mathrm{Sp}^4[\gamma_\mu S^c(y,y)]\,\mathrm{Sp}^4[i\gamma^\circ\gamma^\mu Z^{(k)}(q)\,P^1(q)\,P(q)] = 0,$$

denn die zweite Spur verschwindet für $\mu = 1{,}2$ und die erste für $\mu = 0{,}3$, weil in der $S^c(x,y)$-Funktion (3.10) bei gleichen Argumenten $x = y$ die Terme p° und $-\gamma^\circ\gamma^3 p_3$ aufgrund symmetrischer Integration herausfallen. Damit reduziert sich (3.13) wegen (3.9) auf die Behauptung

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{P}}] \overset{!}{=} 0,$$

die sich aufgrund des aus der Unitarität des S-Operators folgenden „optischen Theorems"

$$2\,\mathrm{Re}(\langle i\,|\,S-1\,|\,i\rangle) = -\sum_f |\langle f\,|\,S-1\,|\,i\rangle|^2 \tag{3.14}$$

auf die Form

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{F}}] \overset{!}{=} -\sum_{q',\gamma}\mathrm{Sp}_{q'}^1[S_{q'q}^{(1)}(\gamma)\,P^1(q)\,P(q)\,S_{q'q}^{(1)+}(\gamma)] \tag{3.15}$$

bringen läßt; denn aus (3.14) folgt in der Näherung bis e^2

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)}P_\eta^1(q)] = -\sum_{q',\gamma}\mathrm{Sp}_{q'}^1[S_{q'q}^{(1)}(\gamma)\,P_\eta^1(q)\,P^1(q)\,P(q)\,S_{q'q}^{(1)+}(\gamma)]$$

und daraus mit (3.7) nach Summation über η

$$2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{P}}] = -2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}_q^1[S_{qq}^{(2)\mathrm{F}}] - \sum_{q',\gamma}\mathrm{Sp}_{q'}^1[S_{q'q}^{(1)}(\gamma)\,P^1(q)\,P(q)\,S_{q'q}^{(1)+}(\gamma)].$$

In (3.15) bilden wir bei der Integration über x° und y° gemäß

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} e^{iWx^\circ}\,\mathrm{d}x^\circ \int_{-T}^{+T} e^{-iWy^\circ}\,\mathrm{d}y^\circ = 2\pi\,\delta(W)$$

wie üblich die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und summieren über die Photonenpolarisation mit Hilfe der bekannten Formel (vgl. [14], S. 440)

$$\sum_\lambda(\ldots\gamma^\mu e_\mu^{(\lambda)}\ldots\gamma^\nu e_\nu^{(\lambda)}\ldots) = (\ldots\gamma^\mu\ldots\gamma_\mu\ldots).$$

So erhalten wir schließlich aus unserer Behauptung (3.12)

$$\frac{e^2}{(2\pi)^4} 2\,\mathrm{Re} \sum_{q'} \int d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}\, d^4K \frac{e^{i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}}{K^2 - i\mu} \mathrm{Sp}^4\left[i\gamma^\circ\gamma^\mu \frac{(K^\circ - E - H')\,P(q'|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(K_\circ + E)(K^\circ - E) + E'^2 - i\varepsilon}\, i\gamma^\circ\gamma_\mu\, P^1(q|\boldsymbol{y})\, P(q|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right] \tag{3.16}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \sum_{q'} \int d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{\varkappa}\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})} \frac{\delta(E - E' - |\boldsymbol{\varkappa}|)}{4E'|\boldsymbol{\varkappa}|} \mathrm{Sp}^4[i\gamma^\circ\gamma^\mu P^1(q|\boldsymbol{y})\, P(q|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, i\gamma^\circ\gamma_\mu (E' + H')\, P(q'|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})].$$

Bei Berücksichtigung der Integraldarstellung ($E > 0$)

$$\frac{\delta(E - E' - |\boldsymbol{\varkappa}|)}{4E'|\boldsymbol{\varkappa}|} \begin{Bmatrix} |\boldsymbol{\varkappa}| \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{2\,\mathrm{Re}}{(2\pi)^2}\left[\int d\varkappa^\circ \begin{Bmatrix} \varkappa^\circ \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{(\varkappa_\circ\varkappa^\circ + \boldsymbol{\varkappa}^2 - i\mu)([\varkappa_\circ + E][\varkappa^\circ - E] + E'^2 - i\varepsilon)}\right] \tag{3.17}$$

— mit der Residuenmethode ohne weiteres nachweisbar — ist die Gl. (3.16) aber offensichtlich erfüllt.

Dementsprechend ist in (3.11) nur noch der Anteil $S_{qq}^{(2)\mathrm{F}}$ von $S_{qq}^{(2)}$ zu berücksichtigen. Umformungen der eben beschriebenen Art führen dann auf die Polarisationsänderung pro Zeiteinheit

$$\overline{\Delta\zeta^{(i)}}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} 2\,\mathrm{Re} \sum_{q'} \int \frac{d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}\, d^4K\, e^{i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}}{(K^2 - i\mu)([K_\circ + E][K^\circ - E] + E'^2 - i\varepsilon)} \mathrm{Sp}^4\left[\frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} \zeta^{(k)}(q)\, Z^{(k)}(q)\right)\right.$$
$$\left.\cdot \frac{E + H}{2} P(q|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,(Z^{(i)}(q)\, i\gamma^\circ\gamma^\mu - i\gamma^\circ\gamma^\mu Z^{(i)}(q'))\,(K^\circ - E - H')\, P(q'|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, i\gamma^\circ\gamma_\mu\right], \tag{3.18}$$

wobei die Operatoren H, $P(q|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ und $Z^{(i)}(q)$ in (2.1), (2.7) und (2.19) definiert sind.

4. Berechnung der Polarisationsänderung

Wir kommen jetzt zur mathematischen Auswertung von (3.18), wobei wir für den Anfangszustand die Elektronenbahn senkrecht zur Feldrichtung, d.h. $p_3 = 0$, voraussetzen. Dazu schreiben wir die Gl. (3.18) am besten in der Form

$$\overline{\Delta\zeta^{(i)}}(q) = C^i(q) + \sum_{k=1}^{3} \zeta^{(k)}(q)\, C^{ki}(q), \quad i = 1, 2, 3; \tag{4.1}$$

die Ausdrücke für die Koeffizienten $C^i(q)$ und $C^{ki}(q)$ liest man unmittelbar aus (3.18) ab. Allein durch Auswerten der Spuren Sp^4 folgt dann

$$C^2(q) = 0, \quad C^{12}(q) = -C^{21}(q) \tag{4.2}$$

und, wenn man außerdem berücksichtigt, daß ungerade Funktionen von p_3' unter der Summe $\sum_{p'_3}$ herausfallen,

$$C^1(q) = C^{13}(q) = C^{31}(q) = C^{23}(q) = C^{32}(q) = 0. \tag{4.3}$$

Somit reduziert sich unser Problem auf die Berechnung der fünf Koeffizienten: $C^3(q)$, $C^{11}(q)$, $C^{22}(q)$, $C^{33}(q)$ und $C^{12}(q)$.

4.1. Integration über den Ort

Zur Integration über die Raumkoordinaten $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ in (3.18) benötigen wir die Funktionen $f(q|\boldsymbol{x})$ und $g(q|\boldsymbol{x})$ aus (2.6) explizit. Mit der Eichung

$$A_\circ = A_3 = 0; \quad A_1 = (\lambda - 1)\,B x_2; \quad A_2 = \lambda\, B x_1 \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

lauten sie[16]

$$\left.\begin{matrix} f(q|\boldsymbol{x}) \\ g(q|\boldsymbol{x}) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\sqrt[4]{\frac{eB}{\pi}}\, e^{i\lambda e B x_1 x_2 + i p_1 x_1 + i p_3 x_3} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{n!}}\, D_n(\xi) \\ \sqrt{\dfrac{1}{(n-1)!}}\, D_{n-1}(\xi) \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{4.4}$$

[16] Zur Vermeidung unnötiger Komplikationen fassen wir dabei eB als positive Größe auf; für Elektronen, d.h. $e < 0$, zeigt dann das Magnetfeld in die negative x_3-Richtung.

Darin ist $D_n(\xi)$ die reelle Weber-Hermite-Funktion mit ganzzahligem Index, wobei n und ξ mit $q = (E^2, p_1, p_3)$ und x_2 gemäß

$$n = \frac{1}{2\,e\,B}(E^2 - m^2 - p_3^2); \quad \xi = \sqrt{2\,e\,B}\,x_2 + \sqrt{\frac{2}{e\,B}}\,p_1$$

zusammenhängen. Es gelten die Integralformeln

$$\sqrt{\frac{e\,B}{n!\,n'!\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_n\left(\sqrt{2\,e\,B}\,x_2 + \sqrt{\frac{2}{e\,B}}\,p_1\right) D_{n'}\left(\sqrt{2\,e\,B}\,x_2 + \sqrt{\frac{2}{e\,B}}\,[p_1 - K_1]\right) e^{-i K_2 x_2}\,\mathrm{d}x_2$$

$$= \exp\left[-i(n-n')\,\varphi + i\,K_2\,\frac{2\,p_1 - K_1}{2\,e\,B}\right] I_{n,n'}(w); \tag{4.5}$$

$$I_{n,n'}(w) := \sqrt{\frac{n'!}{n!}}\,e^{-\frac{1}{2}w}\,w^{\frac{1}{2}(n-n')}\,L_{n'}^{n-n'}(w); \quad w = \frac{K_1^2 + K_2^2}{2\,e\,B}; \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{K_2}{K_1},$$

wobei L das Laguerre-Polynom ist, sowie die Rekursionsformeln

$$d_\xi\,D_n(\xi) = \begin{cases} n\,D_{n-1}(\xi) - \dfrac{\xi}{2}\,D_n(\xi), \\ -D_{n+1}(\xi) + \dfrac{\xi}{2}\,D_n(\xi), \end{cases} \tag{4.6}$$

$$I_{n-1,n'}(w) \pm I_{n,n'-1}(w) = \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{n'}}{\sqrt{w}}\,(I_{n,n'}(w) \pm I_{n-1,n'-1}(w)). \tag{4.7}$$

Setzt man (4.4) in (3.18) ein, führt die Spuren Sp^4 aus und benutzt (4.6), so erhält man bei der Ortsintegration Integrale vom Typ (4.5). Damit folgt dann für die noch zu berechnenden Koeffizienten auf elementarem Wege

$$C^r(q) = \frac{e^2}{(2\,\pi)^4}\,2\,\mathrm{Re}\sum_{n'}\int \frac{c^r(q,n',K)}{(K^2 - i\,\mu)([K_0 + E][K^\circ - E] + E'^2 - i\,\varepsilon)}\,\mathrm{d}^4K \tag{4.8}$$

mit $r = 3,\ 11,\ 22,\ 33,\ 12$ und

$$c^3(q,n',K) = m\left(\frac{1}{b'} - b'\,\frac{E'}{E} - \frac{K^\circ}{E}\right)(I^2_{n,n'-1}(w) - I^2_{n-1,n'}(w)) - m\left(1 - b'\,\frac{E'}{E}\right)(I^2_{n,n'}(w) - I^2_{n-1,n'-1}(w)); \tag{4.9a}$$

$$\begin{aligned} c^{11}(q,n',K) = {} & E'\left(1 - \frac{a\,a'}{b'} - \frac{m^2}{EE'}\right)(I^2_{n,n'-1}(w) + I^2_{n-1,n'}(w)) + E\left(\frac{a\,b'}{a'} - 1\right)(I^2_{n,n'}(w) + I^2_{n-1,n'-1}(w)) \\ & + \sqrt{2\,e\,B\,w}\left(a - \frac{b'}{a'}\right)(I_{n,n'}(w)\,I_{n-1,n'}(w) + I_{n-1,n'-1}(w)\,I_{n,n'-1}(w)); \end{aligned} \tag{4.9b}$$

$$\begin{aligned} c^{22}(q,n',K) = {} & E'\left(1 - a\,a' - \frac{m^2}{EE'}\right)(I^2_{n,n'-1}(w) + I^2_{n-1,n'}(w)) \\ & + E\left(a\,a'\,\frac{E'}{E} + \frac{a}{a'}\,\frac{m^2}{EE'}\right)(I^2_{n,n'}(w) + I^2_{n-1,n'-1}(w)) \\ & + \sqrt{2\,e\,B\,w}\left(a - \frac{1}{a'}\,\frac{m^2}{EE'}\right)(I_{n,n'}(w)\,I_{n-1,n'}(w) + I_{n-1,n'-1}(w)\,I_{n,n'-1}(w)); \end{aligned} \tag{4.9c}$$

$$\begin{aligned} c^{33}(q,n',K) = {} & E'\left(1 - b' + \frac{m^2}{EE'}\left[\frac{1}{b'} - 1\right]\right)(I^2_{n,n'-1}(w) + I^2_{n-1,n'}(w)) \\ & + E\left(b'\,\frac{E'}{E} - 1\right)(I^2_{n,n'}(w) + I^2_{n-1,n'-1}(w)) \\ & + \sqrt{2\,e\,B\,w}\,a\,(I_{n,n'}(w)\,I_{n-1,n'}(w) + I_{n-1,n'-1}(w)\,I_{n,n'-1}(w)); \end{aligned} \tag{4.9d}$$

$$c^{12}(q,n',K) = -i\,\frac{m}{E}\,[K^\circ(I^2_{n,n'-1}(w) - I^2_{n-1,n'}(w)) + E(I^2_{n,n'}(w) - I^2_{n-1,n'-1}(w))], \tag{4.9e}$$

dabei ist

$$E' = \sqrt{m^2 + 2\,e\,B\,n' + K_3^2}; \quad a = \frac{\sqrt{2\,e\,B\,n}}{E}; \quad a' = \frac{\sqrt{2\,e\,B\,n'}}{E'}; \quad b' = \frac{\sqrt{m^2 + 2\,e\,B\,n'}}{E'}.$$

4.2. Summation und Integration über die Parameter der Zwischen- bzw. Endzustände

Mit den in (4.9) gewonnenen Ausdrücken haben wir jetzt noch gemäß (4.8) die Integralsumme über n' und K^μ auszuführen. Offensichtlich sind die Koeffizienten (4.9a) bis (4.9d) reell, dagegen (4.9e) rein imaginär. Das bedeutet wegen (3.17), daß in (4.8) über Parameter einesfalls reeller und anderenfalls virtueller Teilchen summiert sowie integriert wird.

Integralsumme über die virtuellen Zustände. Mit (4.9e) folgt aus (4.8)

$$C^{12}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{m}{E} 2 \operatorname{Im} \sum_{n'} \int \mathrm{d}^4K \frac{K^\circ(I^2_{n,n'-1}(w) - I^2_{n-1,n'}(w)) + E(I^2_{n,n'}(w) - I^2_{n-1,n'-1}(w))}{(K^2 - i\mu)([K_\circ + E][K^\circ - E] + E'^2 - i\varepsilon)} . \tag{4.10}$$

Diese Integralsumme läßt sich ausführen, indem man zunächst die bekannten Integraldarstellungen

$$\frac{2eB}{K^2 - i\mu} = i \int_0^\infty \mathrm{d}s \exp\left\{-is\frac{K^2}{2eB} - \mu_1 s\right\}, \tag{4.11a}$$

$$\frac{2eB}{(K_\circ + E)(K^\circ - E) + E'^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty \mathrm{d}t \exp\left\{-it\frac{(K_\circ + E)(K^\circ - E) + E'^2}{2eB} - \varepsilon_1 t\right\} \tag{4.11b}$$

und dann die Formeln[17]

$$\sum_{n'=0}^\infty (we^{-it})^{n-n'} n'! \, L_{n'}^{n-n'}(w) \, L_{n'}^{n-n'}(w) = \exp\{we^{-it}\} n! \, L_n(2w[1 - \cos t]), \tag{4.12}$$

$$\int_0^\infty e^{-pw} L_n(kw) \, \mathrm{d}w = \frac{(p-k)^n}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0, \tag{4.13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ax^2 + bx)} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left\{i\frac{\pi}{4} - i\frac{b^2}{4a}\right\}, \qquad a > 0, \tag{4.14}$$

benutzt. Auf diese Weise erhält man für (4.10) das Doppelintegral

$$\begin{aligned} C^{12}(q) = &-\frac{e^2}{(2\pi)^2} m \operatorname{Im} \int_0^\infty \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \frac{s}{(s+t)^2} \frac{1 - \cos t - t \sin t}{(s + \sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} \\ &\cdot \left[\frac{s + \sin t + i(1 - \cos t)}{s + \sin t - i(1 - \cos t)}\right]^n \exp\left\{-i\left(\frac{B_\circ}{2B} + n\right)\frac{t^2}{s+t} - \mu_1 s - \varepsilon_1 t\right\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dieses kann mit der Methode der stationären Phase ausgewertet werden, denn $B_\circ/2B$ und n sind wegen

$$B_\circ \equiv \frac{m^2}{e} = 4{,}67 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Oe}, \qquad n = \frac{B_\circ}{2B}\left[\left(\frac{E}{m}\right)^2 - 1\right] \tag{4.16}$$

in dem uns interessierenden Energie- und Feldstärkebereich sehr große Zahlen. Dazu bringen wir (4.15) mit Hilfe der Substitution

$$s = \frac{1-x}{x} t, \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{4.17}$$

auf die Form

$$C^{12}(q) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2} m \operatorname{Im} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{1-x}{x} \frac{1 - \cos t - t \sin t}{\left(\frac{1-x}{x} t + \sin t\right)^2 + (1 - \cos t)^2} \exp\{-i f(t,x) - \mu_2 t\};$$

$$f(t,x) = \left(\frac{B_\circ}{2B} + n\right) x t - 2n \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - \cos t}{\frac{1-x}{x} t + \sin t}.$$

[17] H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer-Verlag, Berlin 1953, S. 151.

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}f(t,x)}{\mathrm{d}t} = \frac{x(B_\circ/2B+n)}{(t-x[t-\sin t])^2+x^2(1-\cos t)^2}\Big[\Big((1-x)t+\Big(x-\frac{n}{n+B_\circ/2B}\Big)\sin t\Big)^2 + \Big(x-\frac{n}{n+B_\circ/2B}(1-\cos t)^2+2(1-\cos t)\frac{(n.\,B_\circ/2B)}{(n+B_\circ/2B)^2}\Big] \neq 0$$

für $\begin{pmatrix}0\leqq t<\infty\\ 0<x\leqq 1\end{pmatrix}$ trägt dann der Integrand bei der Integration über t nur in der Umgebung der unteren Grenze bei. Wir entwickeln deshalb an der Stelle $t=0$:

$$C^{12}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\, m \,\mathrm{Im}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x(1-x)}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}t \exp\{-i\,[(B_0/2B)\,xt+((t^3))]-\mu_2 t\} \tag{4.18}$$

und erhalten nach elementarer Integration

$$C^{12}(q) = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eB}{m}\,; \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}. \tag{4.19}$$

Integralsumme über die reellen Zustände. Die Koeffizienten (4.9a) bis (4.9d) sind reell, so daß wir bei der Ausführung der Integralsumme gemäß (4.8) wegen (3.17) spezielle Näherungs- und Integrationsverfahren anwenden können, die zur quantenmechanischen Berechnung der Synchrotronstrahlung entwickelt worden sind. Wegen Einzelheiten dieser Verfahren verweisen wir auf die zusammenfassende Darstellung[18]. Man vereinfacht dabei (4.9a) bis (4.9d) durch Benutzung von (4.7) und Entwicklung nach den Parametern[19] $\frac{m}{E}$, $\frac{n-n'}{n} \approx 2\frac{|\boldsymbol{K}|}{E} \approx 4\frac{B}{B_0}\frac{E}{m}$ und $\left|\frac{K_3}{\boldsymbol{K}}\right|$ (von der Größenordnung m/E) zu

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad c^3(q,n',K) \approx -m\frac{|\boldsymbol{K}|}{E}\,(I^2_{n,n'}(w)-I^2_{n-1,n'-1}(w)),\\
&\text{b)} \quad c^{11}(q,n',K) \approx m^2\frac{|\boldsymbol{K}|^2}{E^3}\,(I_{n,n'}(w)+I_{n-1,n'-1}(w))^2,\\
&\text{c)} \quad c^{22}(q,n',K) \approx c^{33}(q,n',K) \approx \Big(\frac{1}{2}\frac{K_3{}^2}{E}+\frac{m^2}{2}\frac{|\boldsymbol{K}|^2}{E^3}\Big)(I_{n,n'}(w)+I_{n-1,n'-1})^2 \\
&\qquad\qquad + 2E\,(I_{n,n'}(w)-I_{n-1,n'-1})^2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

und approximiert darin die Funktionen $I_{n,n'}(w)$ durch modifizierte Hankelfunktionen. Schließlich verwandelt man die n'-Summe näherungsweise in ein Integral und erhält nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad C^3(q) = g := \alpha m\Big(\frac{E}{m}\Big)^2\Big(\frac{B}{B_\circ}\Big)^3 \equiv \frac{\alpha}{m^2}\frac{1}{R^3}\Big(\frac{E}{m}\Big)^5;\\
&\text{b)} \quad C^{11}(q) = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{35}{24}\,g;\\
&\text{c)} \quad C^{22}(q) = C^{33}(q) = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{15}{8}\,g;
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$R = E/eB$ ist der klassische Bahnradius für $m \ll E$.

Auf übersichtlicherem Wege kann man das Ergebnis (4.21a) interessanterweise mit der im vorangehenden Abschnitt geschilderten Methode erhalten. Nach (4.8) mit (4.20a) ist nämlich

$$C^3(q) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\frac{m}{E}\,2\,\mathrm{Re}\sum_{n'}\int \frac{I^2_{n,n'}(w)-I^2_{n-1,n'-1}(w)}{(K^2-i\mu)([K_\circ+E][K^\circ-E]+E'^2-i\varepsilon)}\,K^\circ\,\mathrm{d}^4K\,.$$

Setzen wir hier die Integraldarstellungen (4.11) ein und integrieren mit Hilfe der Formeln (4.12) bis (4.14), so erhalten wir

$$C^3(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\, m\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\frac{t}{(s+t)^2}\,\frac{1-\cos t}{(s+\sin t)^2+(1-\cos t)^2} \cdot\Big[\frac{s+\sin t+i(1-\cos t)}{s+\sin t-i(1-\cos t)}\Big]^n \exp\Big\{-i\Big(\frac{B_\circ}{2B}+n\Big)\frac{t^2}{s+t}\Big\}$$

[18] A. A. Sokolov u. I. M. Ternov, Synchrotron-Radiation, Akademie-Verlag, Berlin 1968.

[19] Die Gültigkeitsgrenze $E/m \approx B_\circ/4B$ dieser Näherung liegt weit oberhalb der heute in Zirkularbeschleunigern erreichbaren Energien und Feldstärken.

und weiter mit der Substitution (4.17) sowie $f(t, x)$ aus (4.17) ff.

$$C^3(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} m \,\mathrm{Re} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{1-\cos t}{\left(\frac{1-x}{x} t + \sin t\right)^2 + (1-\cos t)^2} \exp\{-i f(t, x)\}.$$

Anders als in (4.18) müssen wir hier bei der Entwicklung an der Stelle $t=0$ im Exponenten einen Schritt weitergehen, weil der Realteil des Integrals in niedrigster Näherung verschwindet. Wir erhalten so:

$$C^3(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{x}^2 \int_0^\infty \cos\left(\frac{B_\circ}{2B} x t + \frac{n}{12} x (1-x)^2 t^3 + ((t^5))\right) \mathrm{d}t$$

oder mit Airy's Integral $\int\limits_0^\infty \cos(t^3 + x t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \sqrt{x}\, K_{1/3}\left(\frac{2}{3} x \sqrt{\frac{x}{3}}\right)$:

$$C^3(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} m \sqrt{\frac{1}{3n} \frac{B_0}{2B}} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^2}{1-x} K_{1/3}\left(\frac{4}{3} \frac{x}{1-x} \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{B_\circ}{2B}\right)^3}\right). \tag{4.22}$$

Darin ist der Integrand nur für sehr kleine x wesentlich von 0 verschieden, denn nach (4.16) ist auch der Quotient $(1/n)(B_\circ/2B)^3$ sehr groß, und bei großem Argument fällt die modifizierte Hankel-Funktion exponentiell ab

$$K_q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right).$$

Dementsprechend kann man in (4.22) ohne wesentlichen Fehler x gegen 1 vernachlässigen und die Integrationsgrenze von 1 nach ∞ verlegen. Dann ergibt sich mit

$$\int_0^\infty K_q(x)\, x^{p-1}\,\mathrm{d}x = 2^{p-2} \Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

schließlich
$$C^3(q) = \alpha \frac{E^2}{m^7} (e B)^3;$$

das ist genau der Wert aus (4.21a). Die Berechnung der übrigen Koeffizienten $C^{11}(q)$ und $C^{22}(q) \approx C^{33}(q)$ nach diesem Verfahren ist allerdings komplizierter, weil dann die Grenzprozesse $\int \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ und $\sum_{n'} \int \mathrm{d}^4 K$ aus (4.11) bzw. (4.8) nicht mehr ohne besondere Zusatzmaßnahmen vertauschbar sind.

5. Diskussion

Das Gleichungssystem (4.1) für die Polarisationsänderung pro Zeiteinheit $\overline{\Delta\zeta^{(i)}}(q)$ wird durch die Teilergebnisse (4.2) und (4.3) bereits stark vereinfacht und nimmt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \overline{\Delta\zeta^{(1)}}(q) = C^{11}(q)\zeta^{(1)}(q) - C^{12}(q)\zeta^{(2)}(q), \\ &\text{b)} \quad \overline{\Delta\zeta^{(2)}}(q) = C^{12}(q)\zeta^{(1)}(q) + C^{22}(q)\zeta^{(2)}(q), \\ &\text{c)} \quad \overline{\Delta\zeta^{(3)}}(q) = C^{3}(q) + C^{33}(q)\zeta^{(3)}(q). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bei vorgegebener Polarisation $\zeta_0^{(i)}(q_\circ)$ eines Elektronenstrahls mit scharfen Werten $q_\circ$ zu einem Zeitpunkt $T_\circ$ ist damit die Polarisation $\zeta^{(i)}(T)$ zum Zeitpunkt $T > T_\circ$ gemäß

$$\zeta^{(i)}(T) = \zeta_0^{(i)}(q_\circ) + \overline{\Delta\zeta^{(i)}}(q_\circ)\Delta T, \quad \Delta T = T - T_\circ, \tag{5.2}$$

bestimmt. Dabei sind die durch $i = 1, 2, 3$ indizierten Komponenten auf ein Dreibein $t^{(i)\mu}(\pi)$ bezogen, dessen Raumanteil $\boldsymbol{t}^{(i)}(\pi)$ gemäß (2.11) mit (2.12) bei zum Magnetfeld senkrechter Elektronenbahn, d.h.

$p_3 = 0$, mit der Richtung der x_3-Achse (Index 3), des kinetischen Impulses $\boldsymbol{\pi}$ (Index 1) und des auf beiden orthogonalen Vektors (Index 2) zusammenfällt. Demnach folgt aus (5.2) mit (5.1), daß die Komponente der Polarisation in Feldrichtung von der in der Bahnebene unbeeinflußt bleibt und umgekehrt auf diese auch keinen Einfluß ausübt.

Der Ausdruck (5.2) liefert allerdings als Folge der zugrundeliegenden Störungsrechnung nur dann sinnvolle Resultate, wenn das Zeitintervall ΔT so klein gewählt wird, daß sich der Anfangszustand während ΔT durch die Störung nicht wesentlich ändert. Nun verursachen die einzelnen Strahlungsprozesse zwar eine Auffächerung der anfangs scharfen q-Werte; diese ist jedoch relativ gering [z.B. $\Delta E/E = |\boldsymbol{K}|/E \approx (2\,B/B_\circ)\,(E/m)$] und wird zudem in einem Speicherring durch Fokussierungs- und Beschleunigungsfelder wieder rückgängig gemacht[20]. Deshalb beginnen im Speicherring die Strahlungsprozesse zur Zeit T bei praktisch weiterhin scharfem Wert $q_\circ$, jedoch der geänderten Polarisation $\zeta^{(i)}(q_\circ, T)$ der Elektronen; d.h. (5.1) kann in guter Näherung als System zeitlicher Differentialgleichungen für $\zeta^{(i)}(q, T)$ aufgefaßt und integriert werden. Dabei sind die Komponenten der Polarisation in der Bahnebene einerseits und in der Feldrichtung andererseits unabhängig voneinander bestimmbar.

Die Integration der Gln. (5.1 a) und (5.1 b) für die Polarisationskomponenten in der Bahnebene führt zunächst auf

$$\zeta^{(1)}(T) = e^{C^{11}+C^{22}/2}\left(\left[\frac{C^{11}-C^{22}}{2}\,\zeta^{(1)}(0) - C^{12}\zeta^{(2)}(0)\right]\frac{\sin\omega T}{\omega} + \zeta^{(1)}(0)\cos\omega T\right);$$

$$\zeta^{(2)}(T) = e^{C^{11}+C^{22}/2}\left(\left[C^{12}\zeta^{(1)}(0) - \frac{C^{11}-C^{22}}{2}\,\zeta^{(2)}(0)\right]\frac{\sin\omega T}{\omega} + \zeta^{(2)}(0)\cos\omega T\right); \tag{5.3}$$

$$\omega = \sqrt{(C^{12})^2 - \left(\frac{C^{11}-C^{22}}{2}\right)^2}.$$

Darin haben die Koeffizienten C^{12}, C^{11} und C^{22} nach (4.19) und (4.21) die Werte

$$C^{12} = -\,2\,\mu_{\mathrm{a}}\,B; \quad \mu_{\mathrm{a}} = \frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{e}{2m}\,; \quad C^{11} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{35}{24}\,g; \quad C^{22} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{15}{8}\,g; \quad g = \alpha\,m\left(\frac{E}{m}\right)^2\left(\frac{B}{B_\circ}\right)^3.$$

Nun entspricht das Näherungsverfahren in 4.2 einer Entwicklung nach Potenzen von $(2\,B/B_\circ)\,E/m$. Demnach sind die Ausdrücke für C^{11} und C^{22} um Größenordnungen kleiner als C^{12} und können beim Einsetzen in (5.3) gegen C^{12} vernachlässigt werden:

$$\zeta^{(1)}(T) = \exp\left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{5}{3}\,g\,T\right\}\left(\zeta^{(2)}(0)\sin(2\,\mu_{\mathrm{a}}\,BT) + \zeta^{(1)}(0)\cos(2\,\mu_{\mathrm{a}}\,BT)\right),$$

$$\zeta^{(2)}(T) = \exp\left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{5}{3}\,g\,T\right\}\left(-\zeta^{(1)}(0)\sin(2\,\mu_{\mathrm{a}}\,BT) + \zeta^{(2)}(0)\cos(2\,\mu_{\mathrm{a}}\,BT)\right). \tag{5.4}$$

Die zeitliche Änderung der Polarisation in der Bahnebene besteht also aus einem exponentiellen Abfall des Betrages, entsprechend der zunehmenden Orientierung der Spins entgegen der Feldrichtung (vgl. (5.5)), und aus einer gleichförmigen Drehung[21] gegen den kinetischen Impuls, die phänomenologisch durch den Paulischen Zusatzterm $\mu_{\mathrm{a}}\,\Sigma\cdot\boldsymbol{B}$ im Dirac-Operator beschrieben wird und bekanntlich auf das anomale magnetische Moment μ_{a} des Elektrons zurückzuführen ist.

Mit den Werten (4.21 a) und (4.21 c) ergibt sich aus (5.1 c)

$$\zeta^{(3)}(T) = \frac{8\sqrt{3}}{15} + \exp\left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{15}{8}\,g\,T\right\}\left(\zeta^{(3)}(0) - \frac{8\sqrt{3}}{15}\right), \tag{5.5}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis früherer Untersuchungen[1,3], bei denen die jetzt abgeleitete Entkopplung der Polarisationskomponenten bezüglich der Feldrichtung einerseits und der Bahnebene andererseits ad hoc angenommen wurde. Für große Zeiten nähert sich also $\zeta^{(3)}(T)$ dem festen Grenzwert $8\sqrt{3}/15 = 0{,}92$. Da wir für Elektronen die Feldrichtung in die negative x_3-Richtung gelegt haben, ist der Strahl entgegen der Feldrichtung polarisiert, d.h. die magnetischen Momente liegen parallel zur Feldrichtung,

[20] Einen möglichen Einfluß dieser Felder auf die Polarisation lassen wir hier allerdings außer Acht.

[21] Dieser Drehung entspricht eine Oszillation der Polarisationskomponente in Impulsrichtung, die auf anderem Wege von I. M. Ternov und V. S. Tumanov, Sov. Phys. JETP **10**, 809 [1960] berechnet wurde.

haben also die energetisch günstigste Richtung. Die Einstellzeit dieses Grenzwertes ist von der Größenordnung

$$\tau := \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{15}{8}g\right)^{-1} = \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{137}{m}\left(\frac{m}{E}\right)^2\left(\frac{B_\circ}{B}\right)^3 = 1{,}6\cdot 10^{-19}\left(\frac{m}{E}\right)^2\left(\frac{B_\circ}{B}\right)^3 \mathrm{sec}, \quad B_\circ = m^2/e = 4{,}67\cdot 10^{13}\,\mathrm{Oe}$$

und hängt von den experimentellen Gegebenheiten ab. Für $E/m = 10^4$ und $B_\circ/B = 3\cdot 10^9$ ist $\tau = 43$ sec. Danach sollte dieser Selbstpolarisationseffekt aufgrund der Synchrotronstrahlung in modernen Speicherringen durchaus meßbar sein.

Der mit den Komponenten (5.4) und (5.5) gebildete Polarisationsgrad $r(T) = \sqrt{\sum_i \zeta^{(i)}(T)\zeta^{(i)}(T)}$ darf nach (2.20) ff. den Höchstwert 1 zu keinem Zeitpunkt übersteigen. Tatsächlich führt die Annahme, T_1 etwa sei ein solcher Zeitpunkt mit $r(T_1) = 1$, wegen

$$\mathrm{d}_T r(T)|_{T=T_1} = -\sqrt{\frac{1}{3}}g\left(\frac{5}{3} - \sqrt{3}\,\zeta^{(3)}(T_1) + \frac{5}{24}[\zeta^{(3)}(T_1)]^2\right) < 0 \qquad \text{zum Widerspruch.}$$

Es ist bemerkenswert, daß der konstante Gleichgewichtswert $8\sqrt{3}/15$ der Polarisation weder von Masse und Energie des Teilchens noch von Radius und Magnetfeld der Speicheranlage abhängt. Setzt man in (4.20) formal $K_3 = -p_3' = 0$, so bleibt der damit berechnete Wert (4.21a) für $C^3(q)$ ungeändert, während (4.21c) in

$$C_0^{33}(q) = -\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{85}{48}g$$

übergeht. Die Wahrscheinlichkeit, im Gleichgewicht ein Elektron mit Spin in (der energetisch ungünstigen) Richtung des Magnetfeldes zu finden, würde dadurch auf etwa 1% reduziert, d. h. der Strahl wäre innerhalb der Genauigkeitsgrenzen $\pm\alpha = 1/137$ der störungstheoretischen Näherung total polarisiert. Depolarisierende Beiträge liefern also nur die Strahlungsübergänge mit $p_3' \neq 0$, und daß die Polarisation den Maximalwert 1 in Wirklichkeit nicht erreicht, kann so als Folge der Impulsauffächerung in Feldrichtung verstanden werden.

Andererseits sind diese Impulsauffächerung und die damit verbundene Unschärfe des Polarisationsbegriffes (vgl. (2.22) ff.) so klein, daß der Selbstpolarisationseffekt (5.1c) in erster Näherung eindeutig bestimmt ist. Denn wenn man die Polarisationsrichtung des einzelnen Teilstrahles zu scharfem q' nicht — wie wir nach (2.11) und (2.12) — gemäß

$$t^{(3)\mu}(p') = \sqrt{\frac{1}{p_0'^2 - p_3'^2}}\,(p^{3\prime}, 0, 0, p^{\circ\prime})$$

auf das Laborsystem, sondern gemäß

$$\bar{t}^{(3)\mu}(p') = (0,0,0,1) + \frac{p_3'}{m}\left(1, \frac{\mathbf{p}'}{p^{\circ\prime} + m}\right)$$

auf das Ruhsystem der Teilchen bezieht und damit die q'-Summe (3.2) ausführt, so erhält man für $\overline{\Delta\zeta}^{(3)}$ gegenüber (5.1c) nur kleine Korrekturterme, die im Rahmen der in 4.2. benutzten Näherungen vernachlässigbar sind. Da aber alle in Frage kommenden Bezugssysteme zwischen Labor- und Ruhsystem liegen, kann man diese Korrekturterme als Maß für die Unsicherheit der Polarisation unseres Impulsgemisches ansehen.

Unser Ergebnis (5.1c) gilt für den Idealfall eines homogenen äußeren Magnetfeldes. Kürzlich haben BAIER und KATKOV[6] die Spinflipwahrscheinlichkeit in einem beliebigen äußeren Feld berechnet und gezeigt, daß auf diesem Wege kein merklicher Einfluß von den inhomogenen Fokussierungsfeldern zu erwarten ist. Wohl aber sind im realen Speicherring wesentliche Störungen dieser Selbstpolarisation durch verschiedene Resonanzeffekte möglich[4], die auf der Existenz der Betatron- und Synchrotronschwingungen sowie des anomalen magnetischen Momentes beruhen, und zum Teil[22] schon bei der verhältnismäßig kurzdauernden Beschleunigung polarisierter Dirac-Teilchen im Synchrotron eine bedeutende Rolle spielen. Um den Einfluß dieser Depolarisationseffekte zu unterdrücken, muß man durch geeignete Wahl der Speicherenergie, aber auch durch Eliminierung der gefährlichsten Oberschwingungen der Fokussierungsfelder dafür sorgen, daß die Resonanzfähigkeit des Systems für die depolarisierenden Resonanzen möglichst gering ist. Dazu ist eine detaillierte Analyse der jeweils gegebenen Speicheranlage erforderlich.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Dr. H. J. MEISTER. Zahlreiche Diskussionen innerhalb seiner Arbeitsgruppe trugen zur Klärung von Einzelfragen bei. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

[22] M. FROISSART u. R. STORA, Nucl. Instr. Meth. **7**, 297 [1960]. — V. ERNST, Diss. München, Nucl. Instr. Meth. **60**, 52–60 [1968].